

FEUILLE 6 : FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

Exercice 1. Fonctions caractéristiques et lois symétriques

Soit X une variable aléatoire de fonction caractéristique φ_X . On dit que X est de loi symétrique si la loi de $-X$ est la même que celle de X , i.e. $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(-X \in A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. Donner un exemple de loi symétrique.
2. Montrer que si X est de loi symétrique ssi φ_X est à valeurs réelles.
3. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de même loi que X . Donner, en fonction de φ_X , la fonction caractéristique de $X - Y$.
4. Soit ε une variable indépendante de X et de loi de Rademacher $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. Donner, en fonction de φ , la fonction caractéristique de εX .
5. Soient φ et ψ deux fonctions caractéristiques et $p \in [0, 1]$. Montrer que $p\varphi + (1 - p)\psi$ est encore une fonction caractéristique.

Exercice 2. Exemples de fonctions caractéristiques

1. Montrer que la fonction $\phi(t) = \cos^n(t)$ est une fonction caractéristique d'une variable à expliciter.
2. Même question pour la fonction $\phi(t) = \exp(-|t|) \cos(2t)$.
3. Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1 - |x|)\mathbf{1}_{|x| < 1}$?
4. Quelle est la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1 - \cos(x))/(\pi x^2)$?

Exercice 3. Loi arithmétique

Une variable aléatoire X suit une loi arithmétique s'il existe $a \geq 0$ et $b > 0$ tels que X prend ses valeurs dans le réseau $a + b\mathbb{Z}$ i.e.

$$\mathbb{P}(X \in \{a + nb, n \in \mathbb{Z}\}) = 1.$$

1. On suppose que X suit une loi arithmétique. Montrer qu'il existe $c \neq 0$ tel que $|\varphi_X(c)| = 1$.
2. Réciproquement, s'il existe $c \neq 0$ tel que $|\varphi_X(c)| = 1$, on montre que X suit une loi arithmétique.
 - (a) Montrer que si $|\varphi_X(c)| = 1$ alors l'argument de e^{icX} est presque sûrement constant.
 - (b) En déduire que X suit une loi arithmétique.
3. S'il existe $c \neq 0$ et $c' \neq 0$ tels que $|\varphi_X(c)| = |\varphi_X(c')| = 1$ avec $c'/c \notin \mathbb{Q}$, montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 4. Dérivabilité en 0 et moment

On considère une variable aléatoire X de support $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et de loi donnée par

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = -n) = \frac{c}{n^2 \ln(n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où c est une constante de normalisation qu'on ne cherchera pas à préciser.

1. Expliciter la fonction caractéristique φ_X de X et en déduire que pour $t \neq 0$

$$\frac{1 - \varphi_X(t)}{t} = \frac{2c}{t} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1 - \cos(kt)}{k^2 \ln(k)}.$$

2. En distinguant selon que $2 \leq k < 1/t$ et $k \geq 1/t$, montrer que $\frac{1 - \varphi_X(t)}{t}$ tend vers zéro lorsque t tend vers 0.
3. Formuler une remarque pertinente.

Exercice 5. *Stabilité de la loi par somme indépendante*

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On suppose qu'elles possèdent un moment d'ordre 2 et on note σ^2 leur variance commune. On suppose de plus que $(X + Y)/\sqrt{2}$ a même loi que X .

1. Démontrer que X est d'espérance nulle.
2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de la fonction caractéristique φ_X en zéro.
3. Démontrer que pour tout $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X\left(\frac{t}{2^{n/2}}\right)^{2^n} = \varphi_X(t)$.
4. En déduire que X suit une loi normale dont on précisera les paramètres.

Exercice 6. *Caractérisation gaussienne*

On va montrer le théorème suivant attribué à Bernstein : si X et Y sont deux variables $\mathbb{L}^2$ indépendantes de même loi telle que $X - Y$ et $X + Y$ sont indépendantes, alors X et Y sont des variables gaussiennes.

1. Montrer que si X et Y sont deux variables normales centrées réduites alors $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.
2. Réciproquement, on suppose que X et Y sont deux variables de carré intégrable de même loi, on suppose de plus que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.
 - (a) Montrer qu'on peut supposer que X et Y sont centrées et de variance 1.
 - (b) Montrer que φ , la fonction caractéristique commune de X et de Y satisfait l'égalité : $\varphi(2t) = \varphi(t)^3 \varphi(-t)$.
 - (c) En utilisant la continuité de φ en 0, en déduire que φ ne s'annule nulle part.
 - (d) On pose $\psi(t) = \varphi(t)/\varphi(-t)$. Montrer que $\psi(2t) = \psi(t)^2$.
 - (e) En étudiant le comportement de φ au voisinage de 0, en déduire que $\psi(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$.
 - (f) En déduire que $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

Exercice 7. *Développement en série*

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k] + \frac{(it)^n}{(n-1)!} \mathbb{E}\left[X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1} \exp(ituX) du\right].$$

2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k] + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t),$$

où $|\varepsilon_n(t)| \leq 2\mathbb{E}[|X|^n]$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_n(t) = 0$

3. On suppose que X admet des moments de tous ordres et que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X\|_n}{n} = \frac{1}{R} < \infty,$$

où $\|X\|_n := \mathbb{E}[|X|^n]^{1/n}$. Montrer que ϕ_X est alors développable en série entière au voisinage de tout réel, le rayon de convergence étant supérieur ou égal à R/e . En déduire que :

$$\forall t \in \left] -\frac{R}{e}, \frac{R}{e} \right[, \quad \phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k].$$

Exercice 8. *Dérivée seconde d'une fonction caractéristique*

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. On désigne par φ_X sa fonction caractéristique. Montrer que

$$\frac{-1}{\mathbb{E}[X^2]} \frac{d^2}{dt^2} \varphi_X(t)$$

est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire que l'on explicitera.